UNIVERZA NA PRIMORSKEM

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Verjetnost za nematematike. Pregled teorije in izbrane rešene naloge

doc. dr. Marko Orel

DRUGO UČNO GRADIVO

33 strani

Biopsihologija, dodiplomski študijski program

PRVA IZDAJA

Koper, 2015

Kazalo

Predgovor

Statistika je veda z zelo širokim razponom, ki postane dodobra uporabna šele, ko jo dotični pozna v precejšnji meri. Za razliko od matematičnih študijskih programov, kjer ima globina razumevanja prednost pred količino obravnavane snovi, je na nematematičnih dodiplomskih programih pogosto obratno, razumevanje pa ja tako dokaj površinsko. Slednje pri študentu pogosto povzroča frustracijo, pri čemer se le ta pogosto ne zaveda, da k nerazumevanju v precejšnji meri prispeva pomanjkanje predznanja, predvsem iz verjetnosti. Ta se s statistiko najbolj neposredno prepleta v obliki vzorčenja. Dodatne nejasnosti povzročajo raznorazna skakanja iz konkretnega v abstrakno in nazaj ter aproksimacije med diskretnimi in zveznimi slučajnimi spremenljivkami, ki so v statistiki vsepovsod prisotne (npr. preko Gaussove krivulje). Snov v gradivu predstavlja prelet osnovnih pojmov iz verjetnosti, ki jih študenti biopsihologije spoznajo pri predmetu Osnove naravoslovja. Namen gradiva ni razvijanje matematičnih spretnosti pri reševanju težkih nalog, ampak zgolj opismenjevanje študentov s pojmi iz verjetnosti. Razumevanje teh pojmov pripomore k boljšemu razumevanju statistike v nadaljevanju študija. Količina snovi je omejena na minimum, kar tudi pomeni, da so večrazsežne zvezne slučajne spremenljivke izvzete iz gradiva.

POGLAVJE 1

Pregled teorije

1.1 Elementarna verjetnost

1.1.1 Osnovni pojmi

Prvi trije pojmi, ki jih srečamo v v verjetnosti so

- *izid*,
- *dogodek*,
- *verjetnostna mera*,

katerih pomen je ponazorjen v naslednjem primeru.

Primer 1.1.1. Denimo, da vržemo običajno pošteno igralno kocko, zanima pa nas število padlih pik na kocki. Tedaj je možnih izidov 6, ki jih shematično lahko zapišemo na naslednji način.

- *Izidi*: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Množico vseh izidov običajno označimo z Ω. V našem primeru je torej $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dogodki so (posebej odlikovane[a]) podmnožice v Ω.

Npr. dogodek 'padlo bo sodo število pik' ponazorimo z množico $\{2, 4, 6\}$. Verjetnost tega dogodka označimo z $P(\{2, 4, 6\})$, pri čemer je P t.i. *verjetnostna mera*. Seveda je $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$.

[a]V primerih iz verjetnosti, ki jih dijaki spoznajo v srednji šoli, običajno ni razlike med dogodkom in podmnožico, tj. vsaka podmnožica je v tovrstnih primerih tudi dogodek. V splošnem temu ni tako.

Družino vseh dogodkov označimo z $\mathcal{F}$, verjetnostna mera P pa vsakemu dogodku priredi vrednost iz intervala $[0, 1]$, torej gre za preslikavo

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1].$$

Pri tem mora tako družina dogodkov $\mathcal{F}$ kot tudi verjetnostna mera P zadoščati nekaterim lastnostim, ki jim pravimo *aksiomi.* V vsaki verjetnostni knjigi (in marsikateri statistični) so ti aksiomi navedeni na začetku. Medtem, ko so aksiomi preslikave P pomembni tudi za nematematike, aksiomi družine $\mathcal{F}$ pri nematematiku pogosto povzročijo nepotrebno nelagodje in posledično opustitev branja. Spodnjemu navajanju aksiomov družine $\mathcal{F}$ sledi poljudna razlaga, zakaj je potrebno tako 'komplicirati', nematematični bralec pa lahko navedeno vzame v informativno znanje in si ne beli preveč glave, če česa ne razume.

Aksiomi družine dogodkov. *Množica vseh dogodkov $\mathcal{F}$ je taka družina podmnožic množice izidov Ω, da so izpolnjeni naslednji trije aksiomi.*

(i) *Množica Ω je vedno dogodek, tj. $\Omega \in \mathcal{F}$.*

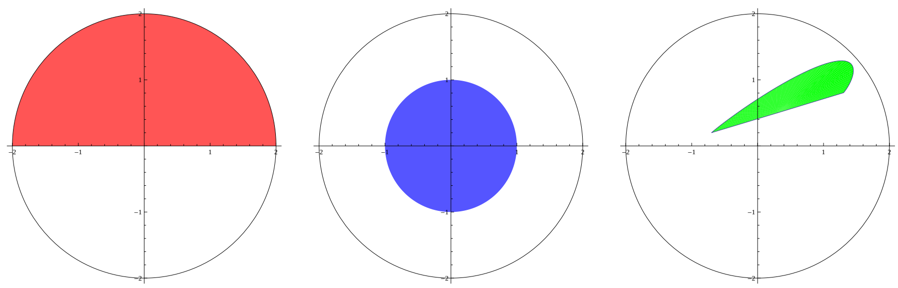
(ii) *Če je A dogodek, potem je tudi A^c dogodek.*

(iii) *Če so množice $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dogodki, potem je dogodek tudi njihova unija $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$.*

Če je množica Ω končna, potem je največkrat vsaka podmnožica v Ω tudi dogodek, tj. družina $\mathcal{F}$ je enaka t.i. potenčni množici množice Ω. Tako v primeru 1.1.1 kot tudi v vseh srednješolskih primerih je temu tako. Zato je študentu pogosto nejasno, čemu služijo zgornji askiomi, saj jim potenčna množica vedno zadošča. Odgovor na to bo delno podal spodnji primer.

Primer 1.1.2. Denimo, da na slepo streljamo v tarčo, ki je oblike kroga v središčni legi z radijem 2. Pri tem vedno zadenemo tarčo, vse točke tarče so pri tem 'enakovredne' v smislu, da so vsi deli tarče enakoverjetno zadeti[b]. Naj bo

- A dogodek, da zadenemo rdeč polkrog iz slike 1.1,
- B dogodek, da zadenemo moder krog iz slike 1.1,
- C dogodek, da zadenemo zelen lik iz slike 1.1.



Slika 1.1

[b]Kaj to natančno pomeni, v resnici trenutno ne vemo, a intuicija bi morala biti jasna. Natančno bi temu rekli, da zadeta točka predstavlja 2-razsežno zvezno slučajno spremenljivko, ki je enakomerno porazdeljena na danem krogu.

Verjetno bi vsak intuitivno (pravilno) uganil, da velja $P(A) = \frac{1}{2}$. Prav tako bi verjetno večina pravilno ocenila, da velja

$$P(B) = \frac{\text{ploščina modrega kroga}}{\text{ploščina cele tarče}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{4}.$$

Prav tako velja

$$P(C) = \frac{\text{ploščina zelenega lika}}{\text{ploščina cele tarče}}.$$

Tukaj pa se nakaže, zakaj ne more vedno biti vsaka podmnožica množice izidov Ω tudi dogodek. Kaj pravzaprav pomeni 'ploščina zelenega lika'? Čeprav se nam zdi, da pojem ploščine poznamo že iz osnovne oz. srednje šole, smo tam obravnavali le ploščino preprostih likov, npr. pravokotnika. V splošnem je ploščina definirana preko integrala, slednji pa ni definiran za vse množice. Množice za katere integral ni definiran so sicer zelo 'grde'[c] in vizualno težko predstavljive. Za tako grdo množico iz naše tarče ne moremo povedati, kakšna je verjetnost, da jo zadenemo, saj njena ploščina ni definirana. Zato ne moremo vedno izbrati potenčne množice za družino vseh dogodkov. Izkazalo se je, da je za družino dogodkov smiselno predpostaviti zgornje tri aksiome, saj je verjetnostna teorija, ki bazira na teh treh aksiomih, dovolj bogata.

Iz danih aksiomov je moč izpeljati dodatne lastnosti družine $\mathcal{F}$.

Lastnosti družine dogodkov.

- *Prazna množica $\emptyset$ je vedno dogodek.*
- *Če sta A in B dogodka, so dogodki tudi množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.*
- *Če so $A_1, A_2 \ldots, A_n$ dogodki, sta dogodka tudi množici $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ in $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$*
- *Če so $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dogodki, je dogodek tudi množica $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$.*

Aksiomi verjetnostne mere. *Preslikava $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je verjetnostna mera, če sta izpolnjena naslednja dva pogoja.*

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) *Če so dogodki $A_1, A_2, A_3, \ldots$* disjunktni, *tj. velja $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, potem je*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots .$$

Iz aksiomov je moč izpeljati dodatne lastnosti verjetnostne mere P.

Lastnosti verjetnostne mere.

- $P(\emptyset) = 0$.
- *Za dogodek A velja $P(A^c) = 1 - P(A)$.*

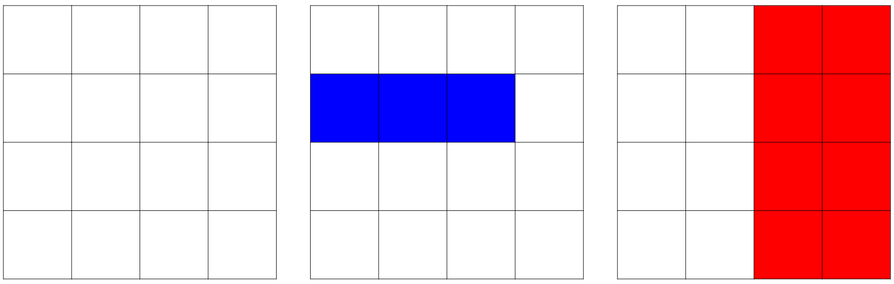
[c]Matematiki imajo v tem kontekstu običajno v mislih Lebesgueovo nemerljive množice.

- *Za dogodka A in B velja*
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
- *Če sta dogodka A in B disjuntkna, tj. $A \cap B = \emptyset$, potem je*
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- *Če so dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjuntkni, potem je*
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$
- *Za dogodka A in B velja $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.*

1.1.2 Pogojna verjetnost

Naj bosta A in B dva dogodka. Zanima nas verjetnost dogodka A, pri tem pa nam nekdo (ki govori resnico) pove, da se je zgodil dogodek B. To nam poda dodatno informacijo, ki lahko spremeni iskano verjetnost dogodka A. Verjetnost, ki upošteva to dodatno informacijo, označimo z $P(A|B)$ in izračunamo po formuli
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.1}$$
Seveda je verjetnost $P(A|B)$ definirana zgolj za dogodke B, za katere je $P(B) > 0$ (z 0 ne moremo deliti).

Primer 1.1.3. Denimo, da miže streljamo na tarčo na enak način kot v primeru 1.1.2, le da je tokrat tarča kvadratne oblike in je razdeljena na 16 enakih kvadratkov kot na sliki 1.2.

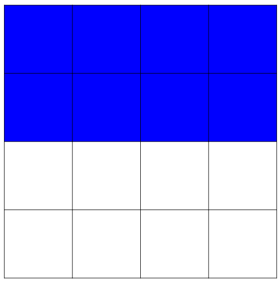


Slika 1.2

Naj bo A dogodek, da zadenemo moder del tarče, B pa dogodek, da zadenemo rdeč del tarče (glej sliko 1.2). Seveda je $P(A) = \frac{3}{16}$. V kolikor pa nam nekdo, ki govori resnico, pove, da se je zgodil dogodek B, tj. da smo zadeli desno polovico tarče, potem se verjetnost spremeni na $P(A|B) = \frac{1}{8}$, saj je le en moder kvadratek v predelu osmih rdečih kvadratkov. Slednje ugotovimo tudi po formuli (1.1), saj velja
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{1}{8}.$$

1.1.3 Neodvisnost dogodkov

Primer 1.1.4. Denimo, da imamo enako tarčo in dogodek B kot v primeru 1.1.3, A pa se zgodi, če zadenemo zgornjo polovico tarče (glej sliko 1.3).



Slika 1.3

Tedaj nam informacija, da se je zgodil dogodek B, nič ne pove o dogodku A, saj sta vrednosti $P(A)$ in $P(A|B)$ obe enaki $\frac{1}{2}$. V takem primeru bomo rekli, da sta dogodka A in B *neodvisna*.

Če enačbo

$$P(A) = P(A|B) \tag{1.2}$$

pomnožimo z $P(B)$ in upoštevamo formulo (1.1), dobimo enačbo

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \tag{1.3}$$

kjer A in B nastopata v lepši, simetrični vlogi in kjer ne pride do deljenja z 0, če je slučajno $P(B) = 0$. Zato je v večini knjig zapisano, da sta dogodka A in B *neodvisna*, če velja enačba (1.3). Seveda pa se je vedno potrebno zavedati, da neodvisnost dogodokov pomeni ravno to, kar pričakujemo od besede 'neodvisno': Če se je zgodil dogodek B, nam to nič ne pove o dogodku A (torej velja (1.2)), če pa se je zgodil dogodek A, nam to nič ne pove o dogodku B, torej velja enačba $P(B) = P(B|A)$[d].

Neodvisnost več kot dveh dogodkov je nekoliko težje formalizirati, čeprav intuitivna predstava ostaja podobna kot pri dveh dogodkih. Pravimo, da so dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *neodvisni*, če velja

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

za vse izbore med sabo različnih indeksov $i_1, i_2, \ldots, i_k$ med indeksi $1, 2, \ldots, n$ (seveda je $k \leq n$).

Primer 1.1.5. Imejmo 4-strano pošteno igralno kocko (kocko si lahko predstavljate kot elektronsko, lahko pa tudi fizično kot tetraeder), kjer so ploskve označene z eno, dvema, tremi oz. štirimi pikami. Kocko enkrat vržemo. Naj bo A_1 dogodek, da pade 1 ali 4 štiri pike, tj. $A_1 = \{1, 4\}$. Podobno naj bo

[d]Izrojena primera $P(A) = 0$ oz. $P(B) = 0$ tukaj ignoriramo.

$A_2 = \{2, 4\}$ in $A_3 = \{3, 4\}$. Ali so dogodki A_1, A_2, A_3 neodvisni? Velja

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(\{4\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2), \\ P(A_1 \cap A_3) &= \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3), \\ P(A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3), \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(\{4\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

Ker nastopa v enem izmed zgornjih štirih primerov neenačba, dogodki A_1, A_2, A_3 niso neodvisni (gledano kot vsi trije skupaj), ampak so odvisni. Hkrati vidimo, da sta poljubna dva izmed dogodkov A_1, A_2, A_3 neodvisna.

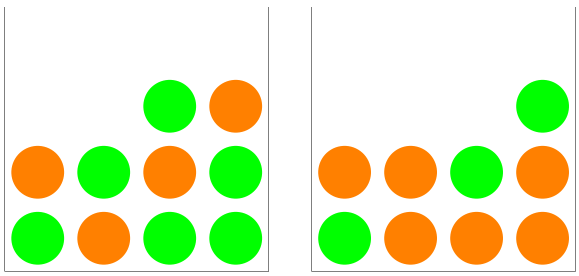
1.1.4 Particijski izrek

Spodnji izrek ima več imen, med katera spadajo *particijski izrek*, *izrek o popolni verjetnosti* in *prva Bayesova formula*.

Particijski izrek. *Naj bodo dogodki $H_1, H_2, H_3, \ldots$ taki, da se vedno zgodi natanko en izmed njih*[e]*, poleg tega pa velja $P(H_i) > 0$ za vse indekse i. Tedaj za poljuben dogodek A velja*

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + \cdots .$$

Primer 1.1.6. Imamo 2 škatli. V prvi je 6 zelenih in 4 oranžne kroglice, v drugi pa so 3 zelene in 6 oranžnih kroglic (glej sliko 1.4).



Slika 1.4: Prva škatla je levo, druga škatla je desno.

Kroglice v prvi škatli dobro premešamo in na slepo[f] izberemo eno. To miže prestavimo v drugo škatlo, ki jo nato dobro pretresemo in iz nje na slepo izvlečemo eno kroglico. Zanimata nas naslednji dve vprašanji.

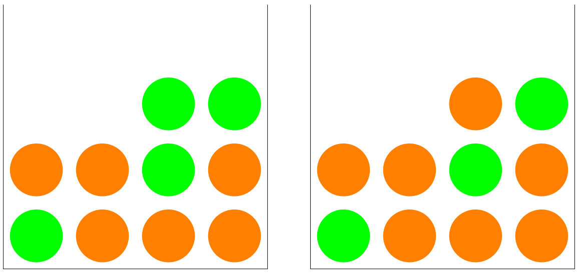
(a) Kolikšna je verjetnost, da je kroglica, ki smo jo izvlekli iz druge škatle, zelena?

[e]Formalno to pomeni, da velja $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \cdots = \Omega$, poleg tega pa je $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Taki družini dogodkov $\{H_1, H_2, H_3, \ldots\}$ pravimo *particija*, iz česar izvira ime 'particijski izrek'.

[f]Izraz 'na slepo' je termin, ki pomeni, da je vsaka od desetih kroglic izbrana z enako verjetnostjo.

(b) Denimo, da je bila kroglica, ki smo jo izvlekli iz druge škatle zelena. Kolikšna je tedaj verjetnost, da smo iz prve v drugo škatlo prestavili oranžno kroglico?

(a) Naj bo A dogodek, katerega verjetnost nas zanima, tj. da je druga izvlečena kroglica zelena. Naj bo H_1 dogodek, da iz prve v drugo škatlo prestavimo zeleno kroglico. Podobno naj bo H_2 dogodek, da iz prve v drugo škatlo prestavimo oranžno kroglico. Po prestavitvi kroglice iz prve v drugo škatlo je stanje v drugi škatli tako kot na sliki 1.5.



Slika 1.5: Druga škatla po prestavitvi kroglice iz prve v drugo škatlo, preden iz nje izvlečemo kroglico. Levo je situacija v primeru dogodka H_1, desno je situacija v primeru dogodka H_2.

Očitno je $P(H_1) = \frac{6}{10}$ in $P(H_2) = \frac{4}{10}$. Iz slike 1.5 razberemo, da velja $P(A|H_1) = \frac{4}{10}$ in $P(A|H_2) = \frac{3}{10}$. Ker so pogoji iz particijskega izreka izpolnjeni, ga lahko uporabimo in odgovorimo na vprašanje iz točke (a):

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) \\
&= \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0.36.
\end{aligned}
$$

(b) Tukaj vprašanje sprašuje po vrednosti $P(H_2|A)$, ki jo izračunamo kot

$$
P(H_2|A) = \frac{P(H_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap H_2)P(H_2)}{P(A)P(H_2)} = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10}}{0.36} = \frac{1}{3}.
$$

1.2 Opis diskretnih in zveznih slučajnih spremenljivk

Dva najpomemnejša razreda slučajnih spremenljivk sestavljajo diskretne in zvezne slučajne spremenljivke. Opisu slučajnih spremnljivk včasih pravimo *porazdelitev* slučajne spremenljivke.

Diskretne slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka X je *diskretna*, če lahko vrednosti, ki jih zavzame, zapišemo v zapredje: $k_1, k_2, k_3, \ldots$ (to zaporedje je lahko končno ali neskončno). Diskretno slučajno spremenljivko lahko opišemo tako, da podamo **vrednosti, ki jih le ta zavzame** in **verjetnosti s katerimi so te vrednosti zavzete**.

Primer 1.2.1. Vržemo pošteno igralno kocko. Naj bo X število padlih pik. Potem je X diskretna slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pri tem pa velja $P(X = k) = \frac{1}{6}$ za vsa števila $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Omenjeno na kratko zapišemo tudi kot

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Primer 1.2.2. Imamo (nepošten) kovanec, kjer grb v posameznem metu pade z verjetnostjo $p \in (0, 1)$. Kovenec mečemo dokler ne pade grb. Naj bo X število potrebnih metov vklučno z zadnjim. Tedaj je X diskretna slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti $1, 2, 3, \ldots$, pri tem pa velja

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

za vsako naravno število k. Pravimo, da je X porazdeljena *geometrijsko* s parametrom p in pišemo $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. Če imamo pošten kovanec, velja $p = \frac{1}{2}$.

Zvezne slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka X je *zvezna*, če obstaja nenegativna funkcija f_X, da velja

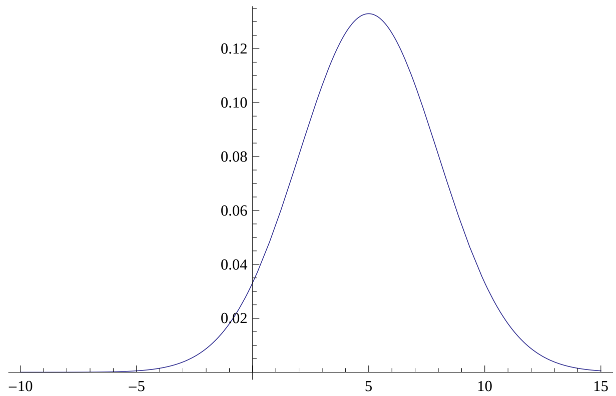
$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)dt$$

za vsa števila $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Pri zveznih šlučajnih spremenljivkah velja $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$. Prav tako je $P(X = a) = 0$ za vsa števila a (seveda lahko X kljub temu zavzame vrednost a). Funkciji f_X pravimo *gostota* slučajne spremenljivke X. **Zvezno slučajno spremenljivko lahko torej opišemo tako, da podamo njeno gostoto.**

Primer 1.2.3. Naj bosta $\sigma > 0$ in μ dve realni števili. Zvezna slučajna spremenljivka je *normalna* s parametroma μ in σ, če je njena gostota enaka funkciji

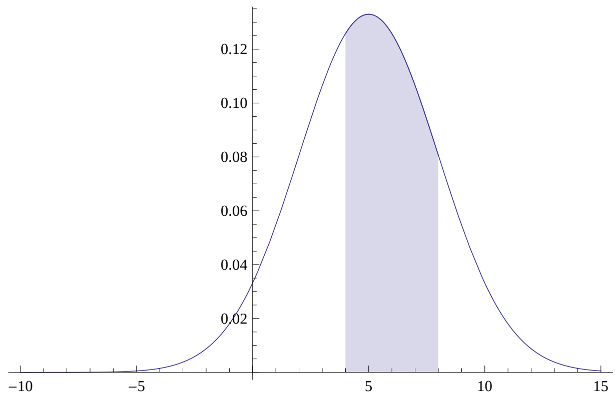
$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

katere graf je prikazan na sliki 1.6[g]. Uporabljamo oznako $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Če je $\mu = 0$ in $\sigma = 1$, pravimo, da je slučajna spremenljivka porazdeljena *standardno normalno*.



Slika 1.6: Graf gostote normalne slučajne spremenljivke s parametroma $\mu = 5$ in $\sigma = 3$.

Vrednost $P(a \leq X \leq b)$ ustreza ploščini med Gaussovo krivuljo in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$ (glej sliko 1.7).



Slika 1.7: Ploščina pobarvanega dela na sliki znaša $P(4 \leq X \leq 8)$, kjer je X porazdeljena normalno s parametroma $\mu = 5$ in $\sigma = 3$.

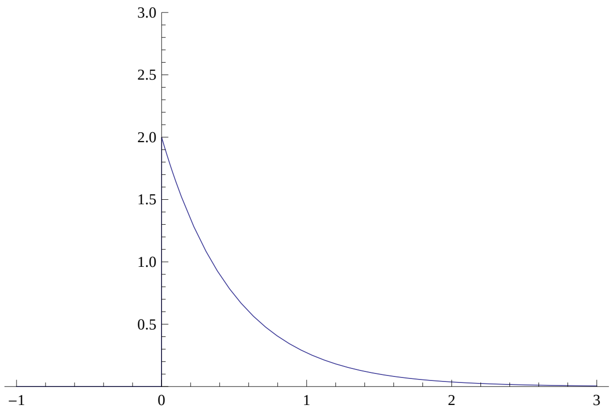
Opomba. Vsaka slučajna spremenljivka X, ki je porazdeljena normalno, tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ za nek μ in σ, je oblike $X = \sigma Z + \mu$, kjer je Z standardno normalna slučajna spremenljivka, tj. $Z \sim N(0, 1)$.

Primer 1.2.4. Naj bo $\lambda > 0$ realno število. Zvezna slučajna spremenljivka je porazdeljena *eksponentno* s parametrom λ, če ima gosoto

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{če } t \geq 0, \\ 0, & \text{če } t < 0 \end{cases} .$$

[g]Grafu gostote normalne slučajne spremenljivke pravimo tudi *Gaussova krivulja*.

Uporabljamo oznako $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Graf gostote eksponentne slučajne spremenljivke s parametrom $\lambda = 2$ je prikazan na sliki 1.8.



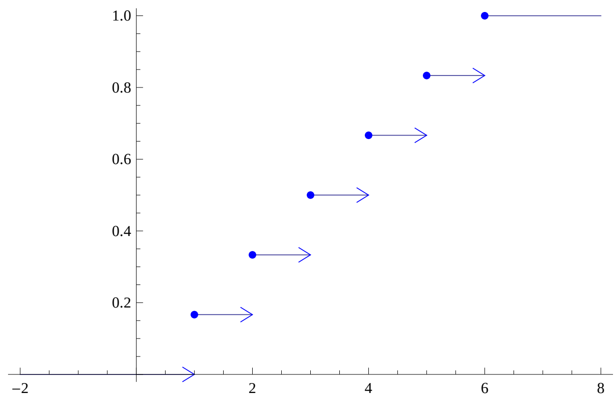
Slika 1.8

1.3 Porazdelitvena funkcija

Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je definirana s predpisom

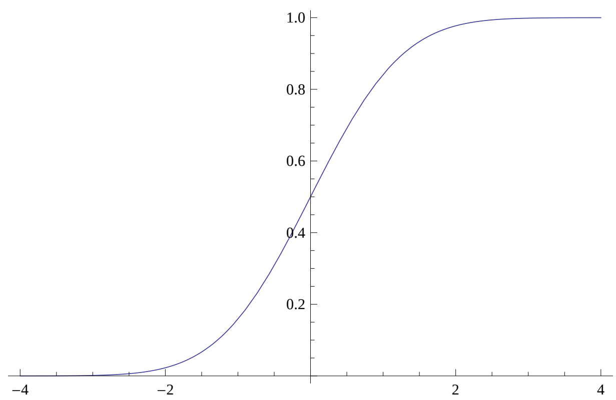
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

(to velja tako za diskretne kot za zvezne slučajne spremenljivke). Graf porazdelitvene funkcije diskretne slučajne spremenljivke (1.4) je prikazan na sliki 1.9.



Slika 1.9: Graf porazdelitevne funkcije za primer diskretne slučajne spremenljivke.

Graf porazdelitvene funkcije standardne normalne slučajne spremenljivke (ta je zvezna), je prikazan na sliki 1.10.

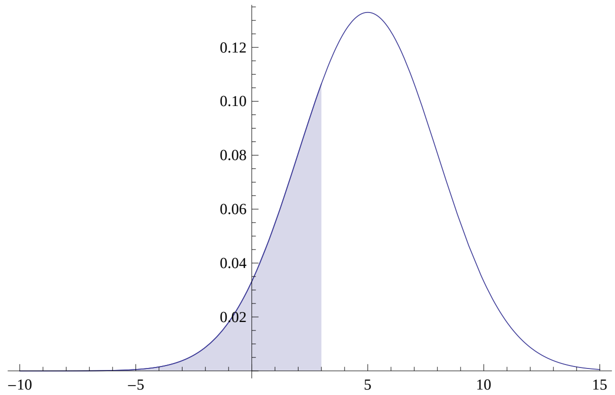


Slika 1.10: Graf porazdelitevne funkcije za primer zvezne slučajne spremenljivke.

Opazimo, da so za graf porazdelitvene funkcije diskretne slučajne spremenljvke značilni skoki, pri zveznih slučajnih spremenljivkah pa teh skokov ni. Pri zveznih slučajnih spremeljivkah velja tudi zveza

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt,$$

kjer je f_X gostota slučajne spremenljivke X. Torej, če je npr. $X \sim N(5, 3^2)$, potem število $F_X(3)$ predstavlja ploščino pobarvanega dela na sliki 1.11.



Slika 1.11

Funkcija Φ

Če je F_Z porazdelitvena funkcija standardne normalne slučajne spremenljivke (tj. $Z \sim N(0,1)$), potem funkcijo Φ definiramo s predpisom

$$\Phi(x) = F_Z(x) - \frac{1}{2}.$$

Seveda je

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

za vsa števila $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Pri določanju vrednosti funkcije Φ si lahko pomagamo s spodnjimi lastnosti.

- Če je $x \geq 4$, potem velja $\Phi(x) \doteq \frac{1}{2}$.
- Če je $x \leq -4$, potem velja $\Phi(x) \doteq -\frac{1}{2}$.
- Če je $0 \leq x \leq 4$, potem lahko vrednost $\Phi(x)$ razberemo iz tabele, ki jo najdemo v prilogi A na koncu gradiva.
- Če je $-4 \leq x \leq 0$, potem iz tabele razberemo vrednost $\Phi(-x)$, nato pa uporabimo zvezo $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

S pomočjo zgornjih lastnosti in tabele lahko razberemo npr.

$$\begin{aligned}
\Phi(5.31) &\doteq \frac{1}{2}, \\
\Phi(-4.11) &\doteq -\frac{1}{2}, \\
\Phi(2.21) &\doteq 0.4864, \\
\Phi(-1.93) &= -\Phi(1.93) \doteq -0.4732.
\end{aligned}$$

Pri uporabi tabele velja omeniti, da vrednost x zaokrožimo na dve decimalki, vrednost $\Phi(x)$ pa je v tabeli podana na štiri decimalke. Seveda se lahko uporabi tabele izognemo tako, da v kakšnem računalniškem programu izračunamo približek integrala

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Tovrstni približek je lahko tudi malce bolj natančen. V programu *Maxima* bi z ukazom

```
bfloat((1/sqrt(2*%pi))*integrate(exp(-x^2/2),x,0,1.23)),fpprec:10;
```

na 10 mest izračunali približek za vrednost $\Phi(1.23)$. Program vrne rezultat

`3.906514476b-1`,

kar pomeni $3.906514476 \cdot 10^{-1} = 0.3906514476$ (primerjaj s tabelo v prilogi A).

Opomba. V marsikateri literaturi je $\Phi(x)$ kar enako $F_Z(x)$ (brez odštevanja polovice). Zato je potrebno biti previden, saj se v takem primeru zgornje lastnosti funkcije Φ spremenijo, prav tako pa je potrebno vrednosti v tabeli popraviti za 0.5.

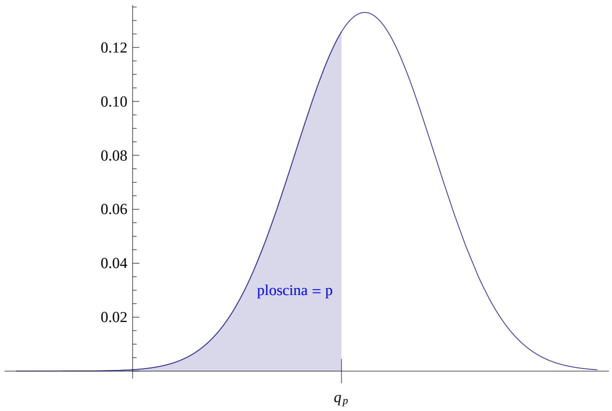
1.4 Kvantili

Zvezne slučajne spremenljivke

Naj bo $0 < p < 1$. Število q_p je *kvantil* zvezne slučajne spremenljivke X za število p, če velja

$$P(X \leq q_p) = p,$$

tj. $F_X(q_p) = p$. Grafični pomen kvantila je razviden iz slike 1.12.



Slika 1.12: Kvantil q_p je tako število, da ima pobarvan del pod grafom gostote ploščino p.

Primer 1.4.1. Naj bo telesna masa neke populacije porazdeljeno približno normalno s parametroma $\mu = 76$ kg in $\sigma = 8$ kg. Torej če je X telesna masa na slepo izbranega posameznika te populacije, potem približno velja $X \sim N(76, 8^2)$[h]. Kaj predstavlja kvantil $q_{2/3}$ za slučajno spremenljivko X? To je tako število kilogramov, da ima dve tretjini populacije manjšo telesno maso, ena tretjina pa večjo maso. Kvantil $q_{2/3}$ lahko v tem primeru (približno) izračunamo. Velja

$$\begin{aligned}
2/3 = P(X \leq q_{2/3}) &= P(8Z + 76 \leq q_{2/3}) = P\left(Z \leq \frac{q_{2/3} - 76}{8}\right) \\
&= P\left(-\infty \leq Z \leq \frac{q_{2/3} - 76}{8}\right) = \Phi\left(\frac{q_{2/3} - 76}{8}\right) - \Phi(-\infty) \\
&= \Phi\left(\frac{q_{2/3} - 76}{8}\right) + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

iz česar sledi

$$0.1667 \doteq \frac{1}{6} = \Phi\left(\frac{q_{2/3} - 76}{8}\right).$$

Iz tabele v prilogi A razberemo, da velja

$$0.43 \doteq \frac{q_{2/3} - 76}{8},$$

[h]Seveda je telesna masa v populaciji porazdeljena diskretno, a jo lahko kljub temu aproksimiramo z zvezno, tj. normalno, spremenljivko.

iz česar sledi

$$q_{2/3} \doteq 79.44 \text{ kg}.$$

Dve tretjini dane populacije ima torej manj kot 79.44 kg, ena tretjina pa ima več kilogramov.

Diskretne slučajne spremenljivke

Kvantil diskretnih slučajnih spremenljvik je definiran nekoliko bolj komplicirano. Naj bo $0 < p < 1$. Število q_p je *kvantil* diskretne slučajna spremenljivke X za število p, če velja

$$P(X < q_p) \leq p \quad \text{in} \quad P(X \leq q_p) \geq p.$$

1.5 Skupna porazdelitev, robne porazdelitve in neodvisnost slučajnih spremenljivk

Pojme v tem poglavju bomo v pretežni meri spoznali le za diskretne slučajne spremenljivke.

Skupna porazdelitev

Par (X, Y) slučajnih spremenljivk lahko obravnavamo kot novo slučajno spremenllljivko, le da so njene vrednosti pari števil. Porazdelitvi slučajne spremenljivke (X, Y) pravimo *skupna porazdelitev* slučajnih spremenljivk X in Y. Včasih rečemo, da je (X, Y) slučajni vektor.

Dogodek, da (X, Y) zavzame npr. vrednost $(1, 2)$, zapišemo lahko na več načinov:

$$\begin{aligned} &\{(X, Y) = (1, 2)\}, \\ &\{X = 1 \text{ in } Y = 2\}, \\ &\{X = 1, Y = 2\}, \\ &\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}. \end{aligned}$$

Verjetnost tega dogodka običajno označimo kot

$$P(X = 1, Y = 2).$$

Če sta X in Y diskretni slučajni spremenljivki, potem je diskretna tudi slučajna spremenljivka (X, Y). Torej jo lahko opišemo tako, da naštejemo njene vrednosti ter verjetnosti s katerimi so te zavzete. Pogosto to naredimo v obliki tabele kot je opisano v naslednjem primeru.

Primer 1.5.1. Imamo dve pošteni igralni kocki (rdečo in modro), ki imata na dveh ploskvah označeno 1 piko, na dveh ploskvah 2 piki in na dveh ploskvah 3 pike. Kocki vržemo. Naj bo X število padlih pik na rdeči kocki, Y pa naj bo vsota padlih pik na rdeči in modri kocki. Spodnja tabela opiše slučajno spremenljivko (X, Y):

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Pri tem npr. število $\frac{1}{9}$ v zelenem predstavlja verjetnost $P(X = 1, Y = 3)$.

Skupno porazdelitev lahko na podoben način definiramo tudi za več slučajnih spremenljivk $X, Y, Z, \ldots$.

Robna porazdelitev

Če imamo dano skupno porazdelitev (X, Y) potem porazdelitvi slučajne spremenljivke X (oz. porazdelitvi slučajne spremenljivke Y) pravimo *robna porazdelitev.* Iz skupne porazdelitve dobimo robni porazdelitvi preko formul

$$P(X = k) = \sum_l P(X = k, Y = l) \quad \textit{in} \quad P(Y = l) = \sum_k P(X = k, Y = l).$$

Primer 1.5.2. Vrnimo se k primeru 1.5.1. Iz tabele vidimo, da robna porazdelitev X zavzame vrednosti $1, 2, 3$. Pri tem velja

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= \sum_{l=2}^{6} P(X = 1, Y = l) \\
&= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) + P(X = 1, Y = 4)+ \\
&\quad + P(X = 1, Y = 5) + P(X = 1, Y = 6) \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0 + 0 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Verjetnost $P(X = 1)$ smo torej dobili s seštevanjem prve (izmed treh) vrstic v tabeli. Podobno dobimo $P(X = 2) = 1/3 = P(X = 3)$.

Porazdelitev slučajne spremenljivke Y, ki zavzame vrednosti $2, 3, 4, 5, 6$ dobimo s seštevanjem stolpcev:

$$\begin{aligned}
P(Y = 2) &= \sum_{k=1}^{3} P(X = k, Y = 2) \\
&= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 3, Y = 2) \\
&= \frac{1}{9} + 0 + 0 = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo $P(Y = 3) = 2/9$, $P(Y = 4) = 3/9$, $P(Y = 5) = 2/9$, $P(Y = 6) = 1/9$.

Neodvisnost

Slučajni spremenljivki X in Y sta *neodvisni*, če velja

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

za vse množice A in B. Pri diskretnih slučajnih spremenljvikah se definicija lahko poenostavi. Diskretni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, če velja

$$P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l)$$

za vsa števila k in l.

Intuitivno sta slučajni spremenljivki neodvisni, če informacija o eni spremenljivki ne vpliva na drugo spremenljivko. V primeru 1.5.1 pri metu rdeče/modre kocke npr. informacija $X = 3$ vpliva na spremenljivko Y, saj tedaj Y ne more zavzeti manjšo vrednost kot 4 (če so na eni kocki padle 3 pike, jih je skupaj padlo vsaj 4). Torej sta spremenljvki X in Y v tem primeru odvisni (tj. nista neodvisni). To lahko preverimo tudi formalno. Velja npr.

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = P(X = 1)P(Y = 2).$$

Če pa je npr. Z število padlih pik na modri kocki, potem sta spremenljivki X

in Z neodvisni. Formalno nam to potrdijo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned}
P(X=1,Z=1) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=1)P(Z=1),\\
P(X=1,Z=2) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=1)P(Z=2),\\
P(X=1,Z=3) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=1)P(Z=3),\\
P(X=2,Z=1) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=2)P(Z=1),\\
P(X=2,Z=2) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=2)P(Z=2),\\
P(X=2,Z=3) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=2)P(Z=3),\\
P(X=3,Z=1) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=3)P(Z=1),\\
P(X=3,Z=2) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=3)P(Z=2),\\
P(X=3,Z=3) &= \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=3)P(Z=3).
\end{aligned}$$

Neodvisnost na podoben način definiramo za več spremenljivk. Diskretne slučajne spremenljivke X, Y, Z so tako neodvisne, če velja $P(X=k, Y=l, Z=m) = P(X=k)P(Y=l)P(Z=m)$ za vsa števila k, l, m.

1.6 Pričakovana vrednost in varianca

Definicija za diskretne slučajne spremenljivke

Pričakovana vrednost ali *matematično upanje* diskretne slučajne spremenljivke X, ki zavzame vrednosti $k_1, k_2, k_3, \ldots$, je število

$$E(X) = k_1 P(X = k_1) + k_2 P(X = k_2) + k_3 P(X = k_3) + \ldots.$$

Zgornjo formulo na kratko zapišemo kot

$$E(X) = \sum_i k_i P(X = k_i).$$

Pričakovano vrednost za slučajno spremenljivko X^2 izračunamo po formuli

$$E(X^2) = k_1^2 P(X = k_1) + k_2^2 P(X = k_2) + k_3^2 P(X = k_3) + \ldots$$

oz.

$$E(X^2) = \sum_i k_i^2 P(X = k_i).$$

Splošneje, če je g 'lepa funkcija'[i], velja $E(g(X)) = \sum_i g(k_i) P(X = k_i)$ (pri vrednosti $E(X^2)$ smo izbrali funkcijo $g(x) = x^2$, pri vrednosti $E(X)$ pa funkcijo $g(x) = x$).

Varianca slučajne spremenljivke X je nenegativno število

$$Var(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big).$$

Ni težko izpeljati, da lahko varianco računamo kar prek formule

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Primer 1.6.1. Naj bo X število padlih pik pri metu poštene kocke. Porazdelitev slučajne spremenljivke X je prikazana v (1.4). Tedaj je

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + \\ &\quad + 4 \cdot P(X = 4) + 5 \cdot P(X = 5) + 6 \cdot P(X = 6) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \cdot P(X = 1) + 2^2 \cdot P(X = 2) + 3^2 \cdot P(X = 3) + \\ &\quad + 4^2 \cdot P(X = 4) + 5^2 \cdot P(X = 5) + 6^2 \cdot P(X = 6) \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}, \end{aligned}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12} \doteq 2.92.$$

Primer 1.6.2. Imejmo sedaj posebno pošteno kocko, ki ima na treh poljih tri pike, na treh poljih pa štiri pike. Tedaj lahko izračunamo (študent naj to naredi sam), da za število padlih pik X velja

$$E(X) = 3.5 \quad in \quad Var(X) = 0.25.$$

[i] Kaj pomeni 'lepa funkcija' prepustimo matematikom.

Definicija za zvezne slučajne spremenljivke

Pričakovana vrednost ali *matematično upanje* zvezne slučajne spremenljivke X z gostoto f_X je število

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx.$$

Pričakovana vrednost za slučajno spremenljivko X^2 izračunamo po formuli

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx.$$

Splošneje, če je g 'lepa funkcija', velja $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$. (pri vrednosti $E(X^2)$ smo vzeli funkcijo $g(x) = x^2$, pri vrednosti $E(X)$ pa funkcijo $g(x) = x$).

Varianca slučajne spremenljivke X je definirana na enak način kot pri diskretnih spremenljivkah. Izračunamo jo ravno tako s pomočjo formule

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Primer 1.6.3. Če je X normalna slučajna spremenljivka s parametroma μ in σ (tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), se izkaže, da velja $E(X) = \mu$ in $Var(X) = \sigma^2$ (spretni študent, ki je vešč integriranja, lahko to poskusi izračunati).

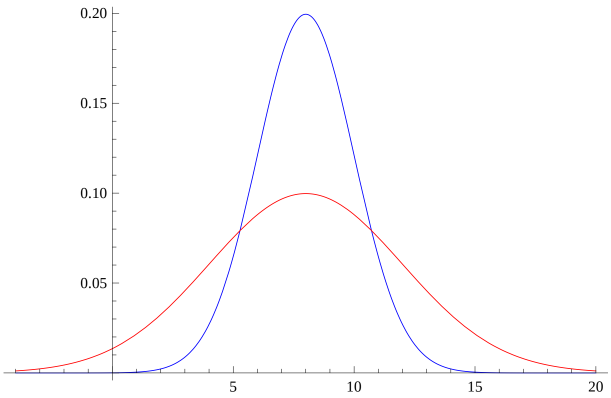
Splošne lastnosti

Ne glede na to, ali imamo opravka z diskretnimi ali zveznimi slučajnimi spremenljvikami, ima pričakovana vrednost spodnje tri lastnosti. Tu sta X in Y slučajni spremenljivki, a pa je realno število:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= E(X) + E(Y) \\ E(aX) &= aE(X) \\ E(a) &= a. \end{aligned}$$

Pričakovana vrednost ima vlogo **'povprečja'** slučajne spremenljivke. V primerih 1.6.1 in 1.6.2 pri metu kocke bi lahko rekli, da v povprečju padejo 3.5 pike.

Varianca slučajne spremenljivke meri **'razpršenost'** vrednosti, ki jih slučajna spremenljivka zavzame. Pri obeh primerih o metu kocke je pričakovana vrednost enaka, vendar so vrednosti v prvem primeru bolj razpršene kot v drugem. To nam je potrdil tudi izračun variance, ki je v primeru 1.6.1 večji kot v primeru 1.6.2. Zvezni slučajni spremenljivki $X \sim N(8, 2^2)$ in $Y \sim N(8, 4^2)$ imata obe enako pričakovano vrednost ($E(X) = 8 = E(Y)$), vendar je varianca pri prvi enaka 4, pri drugi pa je varianca enaka 16. Vrednosti druge slučajne spremenljivke so torej bolj razpršene. To vidimo tudi iz grafov gostot na sliki 1.13.



Slika 1.13

Kvadratnemu korenu variance pravimo *standardna deviacija* ali *standardni odklon* slučajne spremenljivke. Seveda ima standardna deviacija podobno vlogo kot varianca slučajne spremenljivke.

1.7 Centralni limitni izrek

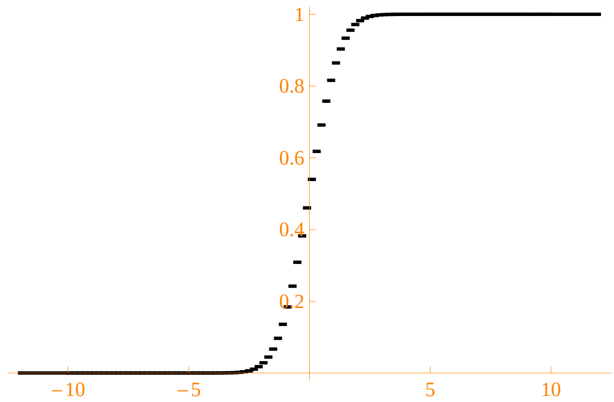
Centralni limitni izrek. *Naj bodo slučajne spremenljivke $X_1, X_2 \dots$ neodvisne in enako porazdeljene. Označimo $\mu := E(X_1)$ in $\sigma^2 := Var(X_1)$. Če je $\sigma^2 < \infty$, potem je za velike n slučajna spremenljivka*

$$Z_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}$$

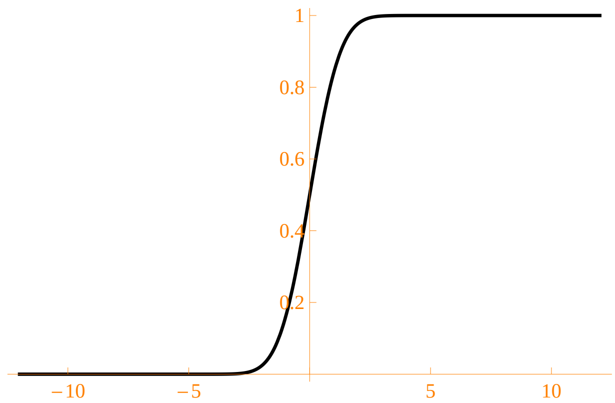
približno standardno normalna. Bolj natančno, če je $Z \sim N(0,1)$, potem sta porazdelitveni funkciji F_{Z_n} in F_Z približno enaki, če je le n dovolj velik[j].

Primer 1.7.1. Imejmo 100 neodvisnih slučajnih spremenljivk $X_1, \dots, X_{100}$ za katere velja

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$



Slika 1.14: Porazdelitvena funkcija $F_{Z_{100}}$, če velja (1.5).



Slika 1.15: Porazdelitvena funkcija F_Z, kjer je $Z \sim N(0,1)$.

[j] Pri dani formulaciji izreka se funkciji F_{Z_n} in F_Z v nobeni točki ne razlikujeta za več kot $\frac{E(|X_1-\mu|^3)}{2\sigma^3\sqrt{n}}$, kar sledi iz rezultata v viru: Tyurin, I. S. *Improvement of the remainder in the Lyapunov theorem.* Teor. Veroyatn. Primen. 56(4) (2011), 808–811 (v ruščini); angleški prevod v Theory Probab. Appl. 56(4) (2012), 693–696.

V tem primeru je slučajna spremenljivka Z_{100} sicer diskretna (izkaže se, da zavzame vrednosti $-10, -9.8, -9.6, \ldots, 9.8, 10$), vendar je približno enaka standardno normalni slučajni spremenljivki, ki je zvezna. Na slikah 1.14 in 1.15 je podobnost med porazdelitvenima funkcijama slučajnih spremenljivk Z_{100} in $N(0,1)$ dobro vidna.

Primer 1.7.2. Denimo, da 100 krat vržemo pošten kovanec. Kolikšna je verjetnost, da je število padlih grbov ≤ 60, vendar ≥ 45? Če prepoznamo, da število padlih grbov opiše binomska spremenljivka $\mathrm{Bin}(100, \frac{1}{2})$, hitro ugotovimo, da je točen odgovor

$$\frac{1}{2^{100}} \sum_{k=45}^{60} \binom{100}{k}. \tag{1.6}$$

Z računalnikom lahko preverimo, da je izraz (1.6) na 2 decimalki enak 0.85. Če nimamo računalnika, pa si lahko pomagamo s centralnim limitnim izrekom. Naj slučajna spremenljvka X_i zavzame vrednost 1, če v i-tem metu pade grb, v kolikor v i-tem metu pade cifra, pa naj bo njena vrednost enaka 0. Tedaj vsota $X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ predstavlja število padlih grbov v 100 metih. Zanima nas torej verjetnost

$$P(45 \leq X_1 + \cdots + X_{100} \leq 60).$$

Ker so spremenljivke X_i opisane v (1.5), lahko hitro ugotovimo, da velja $\mu = E(X_1) = \frac{1}{2}$ in $\sigma = \sqrt{Var(X_1)} = \frac{1}{2}$. Za $n = 100$ torej velja

$$\begin{aligned}
P(45 \leq X_1 + \cdots + X_n \leq 60) &= P(45 - \mu n \leq X_1 + \cdots + X_n - \mu n \leq 60 - \mu n) \\
&= P\left(\frac{45 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{60 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= P(-1 \leq Z_{100} \leq 2) \\
&\doteq P(-1 \leq Z \leq 2) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-1) \\
&\doteq 0.4772 + 0.3413 \\
&\doteq 0.82.
\end{aligned}$$

Dobili smo približek, ki je relativno blizu pravi vrednosti. Pri tem smo v četrtem enačaju uporabili centralni limitni izrek, z Z smo označili standardno normalno slučajno spremenljivko, v predzadnjem enačaju pa smo pogledali v tabelo v prilogi A.

Opomba. Točne vrednosti, kot smo jo v primeru 1.7.2 izračunali v (1.6), pogosto ne znamo izračunati. Takrat je uporaba centralnega limitnega izreka še toliko bolj smiselna.

POGLAVJE 2

Izbrane naloge

2.1 Naloge

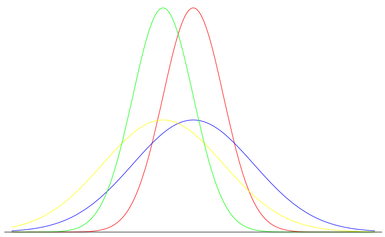
1. Dana je normalna slučajna spremenljivka X, ki ima porazdelitveno funkcijo F in gostoto f. Naj bo $0 < p < 1$ in naj bo q_p pripadajoč kvantil za X. Med spodnjimi sedmimi števili določite tista tri, ki so si med seboj zagotovo enaka:

$$f(q_p),$$
$$f(p),$$
$$F(q_p),$$
$$F(p),$$
$$p,$$
$$\Phi(q_p) + 0.5,$$
$$\Phi(p) + 0.5.$$

2. Na spodnji sliki so prikazani grafi gostot za štiri normalne slučajne spremenljivke s parametroma

$$(a)\ \mu = 5, \sigma = 5,$$
$$(b)\ \mu = 5, \sigma = 10,$$
$$(c)\ \mu = 10, \sigma = 5,$$
$$(d)\ \mu = 10, \sigma = 10.$$

   Določite kateri graf pripada točki (a), (b), (c) in (d).



3. Janez pošilja Katarini kodirana sporočilca v obliki črt in pik. Na poti se spremeni v črtico $\frac{2}{5}$ oddanih pik in se spremeni v piko $\frac{1}{3}$ oddanih črt. V zadnjem sporočilu je Janez oddal $62,5\%$ pik. Privzemite, da so pike in črte v sporočilu razporejene na slepo.

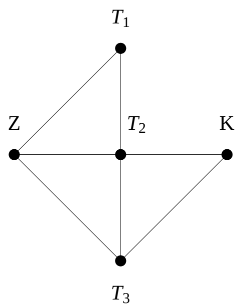
   (a) Kolikšna je verjetnost, da je prvi znak v prejetem sporočilu črta?

   (b) Katarina je kot prvi znak prejela črto. Kolikšna je (pogojna) verjetnost, da je Janez črto tudi oddal?

4. Slepi krt se plazi po rovih kot je narisano na sliki. V vsakem koraku se iz dane točke naključno premakne v eno izmed sosednih točk z enako verjetnostjo (nikoli ne ostane v isti točki). Na začetku se krt nahaja v točki Z.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da se bo po dveh korakih nahajal v točki K?

   (b) Če se bo dveh korakih nahaja v točki K, kolikšna je (pogojna) verjetnost, da se je po prvem koraku nahajal v točki T_2?



5. Na izpit iz statistike je prišlo 50 študentov, od katerih jih je 39 preštudiralo poglavji iz verjetnosti in vzorčenja, ostalih 11 pa ne. Verjetnost, da izpit opravi študent, ki je poglavji preštudiral, je 0.8, verjetnost, da izpit opravi nepripravljen študent, pa je 0.15.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da na slepo izbrani študent opravi izpit?

   (b) Na slepo izberemo enega študenta in ugotovimo, da je opravil izpit. Kolikšna je verjetnost, da se izbrani študent (kljub zanj ugodnemu razpletu) ni naučil poglavij iz verjetnosti in vzorčenja?

6. Za prevoz tovora iz mesta A v mesto B imamo tri možnosti, tj. železnico, cesto in zrak. Polovica blaga potuje po železnici, 30% po cesti, ostalo pa

potuje z letali. Po izkušnjah sodeč se na poti poškoduje 10% cestnega, 5% železniškega in le 2% letalskega tovora.

(a) Kolikšen delež vsega tovora je ob prihodu na cilj poškodovanega?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je bila pošiljka, ki pride na cilj poškodovana, transportirana po kopnem?

7. V tovarni imajo dva stroja za izdelavo izdelkov določenega tipa. Starejši stroj S_1 naredi 85% izdelkov, novejši stroj S_2 pa ima manjšo kapaciteto in naredi 15% izdelkov. Med izdelki, ki jih naredi stroj S_1, je 0.5 % takih, ki so defektni. Med izdelki, ki jih naredi stroj S_2, je 0.1% takih, ki so defektni.

   (a) Na slepo izberemo en izdelek. Kolikšna je verjetnost, da je defekten?

   (b) Izbrani izdelek je bil defekten. Kolikšna je verjetnost, da ga je naredil stroj S_1?

8. Imamo dve pošteni igralni kocki, ki sta rdeče oz. modre barve. Vsako izmed kock enkrat vržemo, pri čemer sta meta neodvisna. Naj bo A dogodek, da je vsota pik na obeh kockah enaka 4. Naj bo B dogodek, da je število pik na modri kocki za natanko 2 večje od števila pik na rdeči kocki.

   (a) Izračunajte verjetnost dogodka A in verjetnost dogodka B.

   (b) Ali sta dogodka A in B neodvisna? Odgovor utemeljite z ustreznim računom.

9. Imamo dve pošteni igralni kocki, ki sta rdeče oz. modre barve. Vsako izmed kock enkrat vržemo, pri čemer sta meta neodvisna. Naj bo A dogodek, da padejo vsaj 4 pike tako na modri kot tudi na rdeči kocki. Naj bo B dogodek, da je število pik na modri kocki za natanko 2 večje od števila pik na rdeči kocki.

   (a) Izračunajte verjetnost dogodka A in verjetnost dogodka B.

   (b) Ali sta dogodka A in B neodvisna? Odgovor utemeljite z ustreznim računom.

10. V skupini petih ljudi sta dva fanta in tri dekleta. Med njimi naključno in na slepo izberemo dve osebi. Naj bo X število deklet med izbranima osebama.

    (a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

    (b) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco slučajne spremenljivke X.

    (c) Recimo, da bi v skupini bilo 15 ljudi, od tega 5 fantov in 10 deklet. Koliko bi v tem primeru znašala verjetnost $P(X = 2)$?

11. Imamo poseben pošten kovanec, ki ima eno stran označeno z 1 piko, drugo stran pa brez pik oz. z 0 pikami. Igramo se naslednjo igro. Če v prvem metu kovanca pade 1 pika, potem kovanec vržemo še enkrat, sicer pa kovanca ne mečemo več. Po morebitnem drugem metu kovanca se igra konča

(kovanec torej vržemo enkrat ali dvakrat). Naj bo X skupno število padlih pik v eni igri. Opišite porazdelitev slučajne spremenljivke X (odgovor ustrezno utemeljite). Izračunajte še pričakovano vrednost in varianco za X.

12. Podano imamo skupno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

$X\backslash Y$	0	2	6
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{9}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{18}$

 (a) Določite (robno) porazdelitev slučajne spremenljivke X in (robno) porazdelitev slučajne spremenljivke Y.
 (b) Izračunajte varianco slučajne spremenljivke X in varianco slučajne spremenljivke Y.

13. Telesna masa posameznika v populaciji A je porazdeljena približno normalno s parametroma $\mu = 70$ kg in $\sigma = 10$ kg. Določite kvantila $q_{0.05}$ in $q_{0.95}$.

14. Za določeno populacijo ljudi se izkaže, da višino posameznika dobro opiše normalna porazdelitev s parametroma $\mu = 175\,\text{cm}$ in σ. Kolikšna je vrednost parametra σ, če veš, da je kvantil $q_{1/3}$ enak 165 cm? Kolikšen delež populacije ima manj kot 160 cm?

15. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, ki so oštevilčeni od 0 do 36. Janez v vsaki igri stavi 1$ na številko 17. V primeru zmage v posamezni igri je njegov čisti dobiček enak 35$, v nasprotnem pa stavo izgubi. Naj bo X_1 Janezov čisti dobiček (oz. izguba) v prvi igri.
 (a) Opišite porazdelitev slučajne spremenljivke X_1.
 (b) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco slučajne spremenljivke X_1.
 (c) S pomočjo centralnega limitnega izreka ocenite verjetnost, da po 1000 igrah Janez ni v izgubi (predpostavite, da ima dovolj denarja, da lahko odigra 1000 iger).

16. Srečko in Jerica bosta odigrala 1000 rund igre "Kamen, papir, škarje". V vsaki rundi vsak od njiju naključno in na slepo izbere enega od treh predmetov (kamen, papir ali škarje). Če oba izbereta enak predmet, je runda neodločena. Če pa izbereta različna predmeta, je eden od njiju rundo dobil, drugi pa izgubil (kamen premaga škarje, škarje premagajo papir, papir premaga kamen). Privzemite, da je izbira predmetov v posamezni rundi neodvisna od izbire v ostalih rundah. Prav tako privzemite, da Srečko in Jerica izbirata predmete neodvisno drug od drugega.
 (a) Naj bo
$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{če v prvi rundi zmaga Srečko;} \\ 0, & \text{če je prva runda neodločena;} \\ -1, & \text{če v prvi rundi zmaga Jerica.} \end{cases}$$
 Določite pričakovano vrednost in varianco slučajne spremenljivke X_1.

(b) S pomočjo centralnega limitnega izreka ocenite verjetnost, da bo po odigranih 1000 rundah število Srečkovih zmag za vsaj 30 večje od števila Jeričinih zmag.

17. Imamo 8-strano pošteno igralno kocko. Ena stran kocke je označena z 1 piko, ena stran s 4 pikami, po tri strani pa so označene z 2 oz. 3 pikami. Naj bo X število padlih pik pri enem metu.

    (a) Opišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

    (b) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco za X.

    (c) Omenjeno kocko vržemo 45 krat. S pomočjo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da skupno število pik padlih v 45 metih ni preseglo 100.

2.2 Rešitve

1. $F(q_p)$, p, $\Phi(q_p) + 0.5$.
2. (a) zelena; (b) rumena; (c) rdeča; (d) modra.
3. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$.
4. (a) $\frac{7}{36}$; (b) $\frac{3}{7}$.
5. (a) 0.657; (b) $\frac{11}{219} \doteq 0.05$.
6. (a) 0.059; (b) $\frac{55}{59} \doteq 0.93$.
7. (a) 0.0044; (b) $\frac{85}{88} \doteq 0.97$.
8. (a) $P(A) = \frac{1}{12}$, $P(B) = \frac{1}{9}$; (b) Dogodka A in B sta odvisna, saj velja
$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{9} = P(A)P(B).$$
9. (a) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{9}$; (b) Dogodka A in B sta neodvisna, saj velja
$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = P(A)P(B).$$
10.
$$(a)\ X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}; \quad (b)\ E(X) = 1.2,\ Var(X) = 0.36; \quad (c)\ \frac{3}{7}.$$
11.
$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad E(X) = \frac{3}{4}, \quad Var(X) = \frac{11}{16}.$$
12.
$$(a)\ X \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \quad (b)\ Var(X) = 5, Var(Y) = 4.$$
13. $q_{0.05} \doteq 53.6$ kg, $q_{0.95} \doteq 86.4$ kg.
14. $\sigma \doteq 23$ cm. Iskani delež znaša približno 0.26.
15.
$$(a)\ X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 35 \\ \frac{36}{37} & \frac{1}{37} \end{pmatrix}; \quad (b)\ E(X) = -\frac{1}{37},\ Var(X) \doteq 34.1;$$
(c) Iskana verjetnost znaša približno 0.44.
16. (a) $E(X) = 0$, $Var(X) = \frac{2}{3}$; (b) Iskana verjetnost znaša približno 0.12.
17.
$$(a)\ X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}; \quad (b)\ E(X) = 2.5,\ Var(X) = 42.75;$$
(c) Iskana verjetnost znaša približno 0.39.

Priloga A: Tabela funkcije Φ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000